
Новые математические методы

УДК 517.954:537.874

Транспортные операторы и точные поглощающие условия в плоских задачах электродинамики несинусоидальных волн для компактных открытых резонаторов с волноводной питающей линией

© В.Ф. Кравченко, Ю.К. Сиренко, К. Ю. Сиренко

Приведено построение транспортных операторов и точных поглощающих условий для двумерных скалярных задач, описывающих переходные состояния электромагнитного поля, формируемого компактными открытыми электродинамическими системами с волноводной питающей линией; созданы надежные и эффективные модели и алгоритмы, позволяющие численно решать актуальные теоретические и прикладные задачи теории и техники антенн, электроники больших мощностей, резонансной квазиоптики.

Ключевые слова: операторный метод; несинусоидальные волны; открытый резонатор; волноводная питающая линия.

Введение. Построение и использование транспортных операторов, введенных в [1], существенно расширило круг строго решаемых задач электродинамики несинусоидальных волн. Это расширение связано, прежде всего, с созданием операторного метода [1 – 5], реализующего в задачах временной области идеи, положенные в основу метода обобщенных матриц рассеяния [6], – одного из наиболее популярных и эффективных методов частотной области. Важную роль сыграли транспортные операторы и при решении ряда актуальных теоретических проблем современной вычислительной электродинамики, базирующейся, в основном, на стандартной конечно-разностной аппроксимации оригинальных начально-краевых задач для системы дифференциальных уравнений Максвелла [7]. Это проблемы корректного ограничения пространства счета метода конечных разностей, используемого для дискретизации так называемых открытых электродинамических задач [3, 4, 8 – 11]; определение поля в дальней и промежуточной зонах по ближнему полю структур, рассеивающих и излучающих импульсные волны [4, 11]; выбор источников возмущения, удовлетворяющих принципу причинности [3, 11]; достоверный анализ переходных процессов в условиях возможного резонансного рассеяния волн [3, 4, 12 – 21] и т.д.

Транспортные операторы определяют пространственно-временные трансформации импульсных волн на конечных отрезках их свободного распространения в регулярных каналах различной природы: в обычных волноводах, в каналах Флоке, в «правильных» сегментах свободного пространства. Они строятся в рамках подхода, который базируется на последовательности технических приемов, широко используемых в теории гиперболических уравнений [3, 22, 23]: неполное разделение переменных в начально-краевых задачах для волновых уравнений → интегральные преобразования в задачах для одномерных уравнений Клейна–Гордона → решение вспомогательных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений → обратные интегральные преобразования. В каждом конкретном случае реализация этой последовательности отличается важными деталями, специфика которых определяется геометрией части пространства, где распространяются электромагнитные волны, и системами координат, избранными для постановки, теоретико-функционального анализа и численного решения рассматриваемых задач. Отметим, что не всегда эти системы совпадают, и от умения вовремя перестроиться во многом зависят качество получаемых аналитических результатов и эффективность конструируемых вычислительных схем [3, 4]. Так, например, в ситуации, которая анализируется ниже, часть аналитической работы (построение транспортных операторов, оперирующих значениями поля на унитарных координатных границах в свободном пространстве) можно выполнить только в полярной системе координат. Но алгоритмизацию задач необходимо проводить в декартовой системе координат – участие в процессе дискретизации угловой координаты заметно понижает эффективность вычислительных схем метода ко-

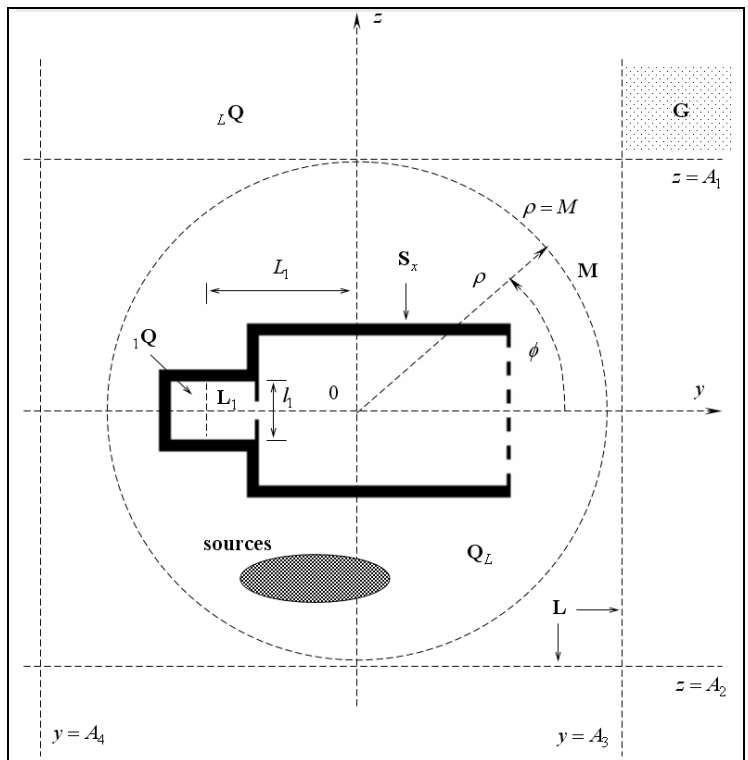
нечных разностей и практически исключает возможность их реализации на общедоступных компьютерах средней мощности [3].

Цель работы – построение транспортных операторов и точных поглощающих условий для плоских (зависимость от координаты x отсутствует – $\partial/\partial x \equiv 0$) начально-краевых задач, описывающих переходные состояния электромагнитного поля в компактных открытых электродинамических системах с волноводной питающей линией. Задачи такого типа уже рассматривались в [3, 4, 9]. Принципиально новые моменты данной работы связаны с введением виртуального подводящего волновода и с решением проблемы больших и удаленных источников возбуждения. Это позволило отказаться от ряда ограничений в моделях (бесконечные фланцы, бесконечные питающие волноводы, только компактные токовые источники и только в непосредственной близости от рассеивающих объектов и т.д.), облегчавших постановку и решение соответствующих начально-краевых задач, но плохо сочетавшихся с физическими реалиями. Основные результаты работы ориентированы на создание надежных и эффективных алгоритмов для численного решения широкого круга актуальных теоретических и прикладных задач теории и техники антенн [16, 21, 24 – 27], электроники больших мощностей [18, 28] и резонансной квазиоптики [3, 4, 19, 20].

1. Постановка ключевых модельных задач. Исследование E - и H -поляризованных импульсных волн $U(g, t)$ в рассматриваемых электродинамических структурах (см., например, рисунок; $\partial/\partial x \equiv 0$) сводится к решению следующих двумерных (в плоскости \mathbf{R}^2 переменной $g = \{y, z\}$) скалярных начально-краевых задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\varepsilon, \sigma}[U] \equiv \left[-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U(g, t) = F(g, t); \quad g = \{y, z\} \in \mathbf{Q}, \quad t > 0, \\ U(g, t)|_{t=0} = \varphi(g), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(g, t)|_{t=0} = \psi(g); \quad g \in \bar{\mathbf{Q}}, \\ E_{tg}(p, t)|_{p=\{x, y, z\} \in \mathbf{S}} = 0; \quad t \geq 0, \\ D[U(g, t) - U^{i(1)}(g, t)]|_{g \in \mathbf{L}_1} = 0; \quad t \geq 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

В случае E -поляризации поля $U(g, t) = E_x(g, t)$, $E_y = E_z = H_x \equiv 0$, $\varepsilon(g)$ и $\sigma(g)$ – кусочно-непрерывные функции. В H -случае $U(g, t) = H_x(g, t)$, $H_y = H_z = E_x \equiv 0$, $\varepsilon(g)$ и $\sigma(g)$ – кусочно-постоянные функции. Здесь $\bar{\mathbf{Q}}$ – замыкание области \mathbf{Q} ; $\{E_x, E_y, E_z\}$ и $\{H_x, H_y, H_z\}$ – компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей; $\sigma = \eta_0 \sigma_0$; $\eta_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2}$ – импеданс свободного пространства; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные вакуума; $\varepsilon \equiv \varepsilon(g) \geq 1$ и $\sigma_0 \equiv \sigma_0(g) \geq 0$ – относительная диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость локально неоднородной, изотропной, недисперсной и немагнитной среды распространения волн. Все физические единицы в рассматриваемых задачах имеют размерности системы СИ, только время t измеряется в метрах – это произведение истинного времени на скорость распространения света в вакууме.



Геометрия задач (1)

Область \mathbf{Q} – часть плоскости \mathbf{R}^2 , ограниченная контурами \mathbf{S}_x и виртуальной границей (портом) \mathbf{L}_1 ; $\mathbf{S} = \mathbf{S}_x \times [|x| \leq \infty]$ – поверхности идеально проводящих элементов исследуемого объекта. Функции $F(g, t)$ (токовые источники), $\varphi(g)$ и $\psi(g)$ (мгновенные источники), $\sigma(g)$ и $\varepsilon(g) - 1$ финитны в \mathbf{Q} . Их носители для всех моментов времени наблюдения $0 \leq t \leq T$ принадлежат замыканию области $\mathbf{Q}_L = \{g \in \mathbf{Q} : A_4 < y < A_3; A_2 < z < A_1\}$ (рисунок). Выше (ниже, правее, левее) виртуальной границы $z = A_1$ ($z = A_2, y = A_3, y = A_4$) нет источников поля и рассеивателей. Это означает, что поле, сформированное компактным узлом, является в области ${}_L\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \setminus (\mathbf{Q}_L \cup \mathbf{L})$ полем уходящих волн, пересекающих составную координатную виртуальную границу \mathbf{L} только в одном направлении: из области \mathbf{Q}_L в область ${}_L\mathbf{Q}$.

Предполагается, что условия непрерывности тангенциальных компонент векторов напряженности поля выполнены в тех случаях, когда этого требует рассматриваемая ситуация, а все исходные данные таковы, что задачи (1) однозначно разрешимы в пространстве Соболева $\mathbf{W}_2^1(\mathbf{Q}^T)$, $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \times (0; T)$, $T < \infty$ (см. Утверждение 1.1 в [3] и [29]).

Задачи (1) отличаются от задач (3.12) из [4] и задач (3.52) из [3], касающихся компактных неоднородностей пространства \mathbf{R}^2 , только тем, что допускают существование источников возмущения в области ${}_1\mathbf{Q}$ – в регулярном виртуальном плоскопараллельном волноводе шириной l_1 , который примыкает к области вдоль границы (вдоль порта) \mathbf{L}_1 (рисунок). Эти источники порождают импульсную волну $U^{i(1)}(g, t)$, набегающую из области ${}_1\mathbf{Q}$ на границу \mathbf{L}_1 . Введение волновода ${}_1\mathbf{Q}$ позволяет моделировать объекты с уходящими на бесконечность регулярными границами \mathbf{S} , оставаясь в рамках, более удобных и в большей степени отвечающих физическим реалиям представлений, справедливых, строго говоря, только для компактных неоднородностей свободного пространства. Важно также и то, что при таком подходе работу моделируемого объекта можно изучать в режиме возбуждения из волноводной питающей линии, задавая на границе \mathbf{L}_1 первичный сигнал $U^{i(1)}(g, t)$, порождаемый токовыми или мгновенными источниками, носители которых расположены в виртуальной области ${}_1\mathbf{Q}$.

Из сказанного следует, что для физически верного отображения моделируемых ситуаций условие

$$D \left[U(g, t) - U^{i(1)}(g, t) \right] \Big|_{g \in \mathbf{L}_1} = 0, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

в задачах (1) должно быть точным поглощающим условием: поле уходящей в виртуальный плоскопараллельный волновод ${}_1\mathbf{Q}$ волны $U^{s(1)}(g, t) = U(g, t) - U^{i(1)}(g, t)$ не деформируется мнимой границей \mathbf{L}_1 , отражение в область отсутствует, волна $U^{s(1)}(g, t)$ полностью проходит в область ${}_1\mathbf{Q}$, т.е. как бы поглощается этой областью или ее границей \mathbf{L}_1 . Такие условия для импульсных электромагнитных волн, направляемых регулярными волноводами различного поперечного сечения, построены в работах [3, 4, 10]. Воспользуемся соответствующими результатами и представим условие (2) для геометрии, изображенной на рисунке, в виде

$$U^{s(1)}(-L_1, z, t) = \sum_{n \in \{n\}} \left\{ \int_0^t J_0[\lambda_{n1}(t-\tau)] \left[\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial U^{s(1)}(y, \tilde{z}, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=-L_1} \mu_{n1}(\tilde{z}) d\tilde{z} \right] d\tau \right\} \mu_{n1}(z), \quad a_1 \leq z \leq b_1, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

(нелокальное – по пространственной переменной z и по переменной времени t – точное поглощающее условие) или в виде

$$U^{s(1)}(-L_1, z, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial W(z, t, \varphi)}{\partial t} d\varphi, \quad t \geq 0, \quad a_1 \leq z \leq b_1,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] W(z, t, \varphi) = \frac{\partial U^{s(1)}(y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=-L_1}, \quad a_1 \leq z \leq b_1, \quad t > 0, \\ W(z, 0, \varphi) = \frac{\partial W(z, t, \varphi)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad a_1 \leq z \leq b_1, \\ W(a_1, t, \varphi) = W(b_1, t, \varphi) = 0, \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

(локальное точное поглощающее условие). В (3) и (4) $y = -L_1$ – плоскость, в которой расположена граница \mathbf{L}_1 ; $W(z, t, \varphi)$ – вспомогательная функция; $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ – числовой параметр; $J_q(\dots)$ – функции Бесселя; $\lambda_{n1} = n\pi/l_1$, $l_1 = b_1 - a_1$; и $z = b_j$ – плоскости, в которых расположены нижняя и верхняя стенки виртуального волновода ${}_1\mathbf{Q}$. В случае E -поляризации поля $\{n\} = 1, 2, \dots$ и $\mu_{n1}(z) = \sqrt{2/l_1} \sin[n\pi(z - a_1)/l_1]$, а в случае H -поляризации – $\{n\} = 0, 1, 2, \dots$ и $\mu_{n1}(z) = \sqrt{(2 - \delta_0^n)/l_1} \cos[n\pi(z - a_1)/l_1]$, где δ_0^n – символ Кронекера.

Представим импульсную волну $U^{i(1)}(g, t)$, набегающую из области ${}_1\mathbf{Q}$ на границу \mathbf{L}_1 , в следующем виде:

$$U^{i(1)}(y, z, t) = \sum_{n \in \{n\}} v_{n1}(y, t) \mu_{n1}(z), \quad g = \{y, z\} \in {}_1\mathbf{Q}, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Здесь $v_{n1}(y, t)$ – пространственно-временные амплитуды сигнала $U^{i(1)}(g, t)$:

$$v_{n1}(y, t) = \int_{a_1}^{b_1} U^{i(1)}(y, z, t) \mu_{n1}(z) dz, \quad n \in \{n\}. \quad (6)$$

Из (3) – (6) следует, что для материализации условия (2) необходимо задать в поперечном сечении $y = -L_1$ волновода ${}_1\mathbf{Q}$ функции $v_{n1}(-L_1, t)$ и $v'_{n1}(-L_1, t) = \partial v_{n1}(y, t) / \partial y \Big|_{y=-L_1}$, $n \in \{n\}$. Необходимо также, чтобы источник возмущений (5), заданный граничными значениями своих амплитуд, удовлетворял принципу причинности. Это означает, что каждая из функций $U_n^{i(1)}(g, t) = v_{n1}(y, t) \mu_{n1}(z)$; $t > 0$ должна отвечать импульсной электромагнитной волне, распространяющейся в волноводе ${}_1\mathbf{Q}$ в направлении растущих значений y . Эти требования будут выполнены, если [3, 5]

$$v_{n1}(-L_1, t) = - \int_0^t J_0[\lambda_{n1}(t - \tau)] \chi(t - \tau) v'_{n1}(-L_1, \tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad n \in \{n\}. \quad (7)$$

Соотношение (7) и другие, позволяющие тестировать данные, которые определяют первичное возмущение, следуют из представлений [1 – 5]

$$u_{n1}(y, t) = - \int_0^t J_0 \left[\lambda_{n1} \left((t - \tau)^2 - (y - y_0)^2 \right)^{1/2} \right] \chi[(t - \tau) - (y - y_0)] u'_{n1}(y_0, \tau) d\tau, \quad y \geq y_0, \quad t \geq 0, \quad n \in \{n\}. \quad (8)$$

Выражение (8) – это точные условия излучения для пространственно-временных амплитуд импульсных волн $U(g, t) = \sum_{n \in \{n\}} u_{n1}(y, t) \mu_{n1}(z)$, распространяющихся по плоскопараллельному волноводу от границы $y = y_0$ в направлении $y \rightarrow \infty$. Представления (8) задают диагональный транспортный оператор $Z_{y_0 \rightarrow y}(t)$, действующий в пространстве эволюционных базисов $u_1(y, t) = \{u_{n1}(y, t)\}_n$ сигналов $U(g, t)$ [1 – 5] по правилу

$$u(y, t) = Z_{y_0 \rightarrow y}(t)[u(y_0, \tau)], \quad y \geq y_0, \quad t \geq 0 \quad (9)$$

и определяющий все пространственно-временные трансформации сигнала $U(g, t)$ при его свободном распространении на конечном отрезке $y \geq y_0$ регулярного плоскопараллельного волновода (здесь $\chi(\dots)$ – ступенчатая функция Хевисайда).

2. Точные условия излучения для импульсных волн, уходящих в свободное пространство.

В области ${}_M\mathbf{Q} = \{g = \{\rho, \phi\} : \rho > M\}$ (см. рисунок; $g = \{\rho, \phi\}$ – полярные координаты), так же, как и области ${}_L\mathbf{Q}$, нет источников поля и эффективных рассеивателей. Решения $U(g, t)$ начально-краевых задач (1) здесь задают импульсные электромагнитные волны, пересекающие границы $\mathbf{M} = \{g : \rho = M\}$ и \mathbf{L} только в одном направлении, – уходящие в свободное пространство волны. Из (1) следует, что

$$\begin{cases} \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] U(g, t) = 0, & g = \{\rho, \phi\} \in {}_M\mathbf{Q}, \quad t > 0, \\ U(g, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} U(g, t)|_{t=0} = 0, & g \in \overline{{}_M\mathbf{Q}}, \\ U(\rho, \phi, t) = U(\rho, \phi + 2\pi, t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Отделяя переменную ϕ в задачах (10), приходим к представлению

$$U(\rho, \phi, t) = \sum_n u_n(\rho, t) \mu_n(\phi), \quad g \in \overline{{}_M\mathbf{Q}}, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

где $\mu_n(\phi) = (2\pi)^{-1/2} \exp(in\phi)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – полная (в пространстве $\mathbf{L}_2(0 < \phi < 2\pi)$), ортонормированная система поперечных функций, а пространственно-временные амплитуды $u_n(\rho, t)$ (эволюционные базисы $u(\rho, t) = \{u_n(\rho, t)\}_n$) волн $U(\rho, \phi, t)$ определяются решениями начально-краевых задач:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right] u_n(\rho, t) = 0, & \rho > M, \quad t > 0, \\ u_n(\rho, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_n(\rho, t)|_{t=0} = 0, & \rho \geq M. \end{cases} \quad (12)$$

Умножим теперь (12) на $\chi(\rho - M)$ и воспользуемся преобразованием Ханкеля по ρ на полуоси $\rho \geq 0$ (изображение \leftrightarrow оригинал):

$$\tilde{f}_n(\omega) = H[f_n](\omega) \equiv \int_0^\infty f_n(\rho) \rho J_{|n|}(\rho\omega) d\rho \leftrightarrow f_n(\rho) = H^{-1}[\tilde{f}_n](\rho) \equiv \int_0^\infty \tilde{f}_n(\omega) \omega J_{|n|}(\rho\omega) d\omega. \quad (13)$$

Получим для изображений $\tilde{Z}_n(\omega, t)$ функций $Z_n(\rho, t) = u_n(\rho, t) \chi(\rho - M)$ выражения

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) \tilde{Z}_n(\omega, t) = M \left[u_n(M, t) J'_{|n|}(\omega M) - u'_n(M, t) J_{|n|}(\omega M) \right], & \omega > 0, \quad t > 0, \\ \tilde{Z}_n(\omega, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{Z}_n(\omega, t)|_{t=0} = 0, & \omega \geq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $u'_n(M, t) = \frac{\partial}{\partial \rho} u_n(\rho, t)|_{\rho=M}$, $J'_{|n|}(\omega M) = \frac{\partial}{\partial \rho} J_{|n|}(\rho\omega)|_{\rho=M}$.

При построении (14) были использованы известное соотношение [30]

$$-\omega^2 \tilde{f}_n(\omega) \leftrightarrow \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{\rho d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right] f_n(\rho),$$

цепочка очевидных равенств

$$\chi(\rho - L) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] u_n(\rho, t) = \chi(\rho - L) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] u_n(\rho, t) =$$

$$= \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] Z_n(\rho, t) - \delta(\rho - L) \left[\frac{1}{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \right] u_n(\rho, t) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\delta(\rho - L) u_n(\rho, t) \right]$$

и равенство $(\partial^\alpha f, \gamma) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \gamma)$, которое определяет обобщенную производную $\partial^\alpha f$ обобщенной функции f [31]; $\delta(\dots)$ – δ -функция Дирака.

Решения задач (14) (см., например, формулы (2.7)–(2.10) в [4])

$$\tilde{Z}_n(\omega, t) = \frac{M}{\omega} \int_0^t \sin[\omega(t - \tau)] \left[u_n(M, \tau) J'_{|n|}(\omega M) - u'_n(M, \tau) J_{|n|}(\omega M) \right] d\tau$$

после применения обратного преобразования (13) приводят к представлениям

$$u_n(\rho, t) = M \int_0^t \left[u_n(L, \tau) f'_n(M, \rho, t - \tau) - u'_n(M, \tau) f_n(M, \rho, t - \tau) \right] d\tau, \quad \rho \geq M, \quad t \geq 0, \quad (15)$$

которые позволяют проследить все изменения в амплитудах уходящих цилиндрических волн $U(\rho, \phi, t)$, распространяющихся от окружности \mathbf{M} до любой окружности с радиусом $\rho \geq M$. Здесь

$$f_n(r, \rho, t - \tau) = \int_0^\infty \sin[\omega(t - \tau)] J_{|n|}(\omega r) J_{|n|}(\omega \rho) d\omega, \quad (16)$$

$$f'_n(M, \rho, t - \tau) = \left. \frac{\partial f_n(r, \rho, t - \tau)}{\partial r} \right|_{r=M}.$$

Интегрирование в (16) сводится к определению значений функций Лежандра 1-го ($P_{|n|-1/2}(a)$) и 2-го ($Q_{|n|-1/2}(-a)$) рода при значениях аргумента $a_{r,\rho} = \left[r^2 + \rho^2 - (t - \tau)^2 \right] / (2\rho r)$ [32]:

$$f_n(r, \rho, t - \tau) = \begin{cases} 0; & 0 < t - \tau < \rho - r, \\ P_{|n|-1/2}(a_{r,\rho}) / \left[2(r\rho)^{1/2} \right], & \rho - r < t - \tau < \rho + r = \\ = \chi \left[(t - \tau) - (\rho - r) \right] Q_{|n|-1/2}(-a_{r,\rho}) \cos(n\pi) / \left[\pi(r\rho)^{1/2} \right], & 0 < t - \tau, \\ Q_{|n|-1/2}(-a_{r,\rho}) \cos(n\pi) / \left[\pi(r\rho)^{1/2} \right], & \rho + r < t - \tau. \end{cases}$$

Последний переход в выписанной выше формуле осуществлен с использованием известных свойств функций Лежандра [33]: $P_\nu(x) = \cos(\nu\pi) P_\nu(-x) - (2/\pi) \sin(\nu\pi) Q_\nu(-x)$.

Продолжая преобразования, перейдем от точного условия излучения (15) для амплитуд уходящих волн к точным условиям излучения для импульсных волн $U(g, t)$ в целом. Принимая во внимание [31, 33] факт, что значение $Q_{|n|-1/2}(-a_{r,\rho})$ при $t - \tau = \rho - r$ равно $Q_{|n|-1/2}(-1) = \pi P_{|n|-1/2}(1) / (2 \cos(n\pi)) = \pi / (2 \cos(n\pi))$, а $\partial \chi \left[(t - \tau) - (\rho - r) \right] / \partial r = \delta \left[(t - \tau) - (\rho - r) \right]$, после выполнения дифференцирования в (15) и суммирования результатов согласно представлению (11), получаем для $\rho \geq M$ и $t \geq 0$:

$$U(\rho, \phi, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{\rho}} U(M, \phi, t - \rho + M) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{M}{\rho}} \sum_n (-1)^n \mu_n(\phi) \times \int_0^{t - (\rho - M)} \left\{ \frac{u_n(M, \tau)}{2L} \left[Q'_{|n|-1/2}(-a_{M,\rho}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\rho^2 - M^2 - (t - \tau)^2}{M\rho} \right) - Q_{|n|-1/2}(-a_{M,\rho}) \right] - u'_n(M, \tau) Q_{|n|-1/2}(-a_{M,\rho}) \right\} d\tau. \quad (17)$$

Здесь $Q'_{|n|-1/2}(-a) = \left. \frac{\partial}{\partial x} Q_{|n|-1/2}(x) \right|_{x=-a}$.

Опуская в (17) точку наблюдения $\{\rho, \phi\}$ на виртуальную границу $\rho = M$, приходим к следующему точному поглощающему условию:

$$U(M, \phi, t) = \frac{2}{\pi} \sum_n (-1)^n \mu_n(\phi) \left[\int_0^t [u_n(M, \tau) \xi_n(t - \tau) - u'_n(M, \tau) \eta_n(t - \tau)] d\tau \right],$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad t \geq 0; \quad \eta_n(t - \tau) = Q_{|n|-1/2}(-a_{M,M}),$$

$$\xi_n(t - \tau) = \left[2Q'_{|n|-1/2}(-a_{M,M})(a_{M,M} - 1) - Q_{|n|-1/2}(-a_{M,M}) \right] (2M)^{-1}. \quad (18)$$

Справедливо следующее утверждение [4, 29, 31, 34, 35].

Утверждение 1. Оригинальные открытые задачи (1) и задачи (1) с ограниченной областью анализа, дополненные условиями (17), (18), – эквивалентны. Требования, выполнение которых гарантирует их однозначную разрешимость (классы корректности), совпадают. <

Справедливость этого утверждения вытекает из следующих трех фактов: 1) оригинальные задачи (1) однозначно разрешимы [3, 29]; 2) решение оригинальной задачи является также и решением задачи модифицированной (по построению); 3) решение модифицированной задачи единственно. Третий факт доказывается в рамках стандартных процедур, базирующихся на построении и использовании энергетических оценок решений $U(g, t)$ (оценок для U^2 , $(\partial U / \partial t)^2$ и $|\text{grad} U|^2$). В [29, 31, 34] подобные доказательства построены для начально-краевых задач с обычными граничными условиями, а в [35] доказана теорема единственности для задач с точными поглощающими условиями.

Полученные выше результаты позволяют корректно ограничивать пространство счета открытых начально-краевых задач (1) и строить устойчивые, сходящиеся схемы их численного решения, опираясь на стандартные процедуры метода конечных разностей [3, 29]. Соотношения (15), (17) дают решение проблемы дальней зоны, определяя, в частности, транспортный оператор $Z_{M \rightarrow \rho}(t)$, действующий в пространстве эволюционных базисов $u(\rho, t) = \{u_n(\rho, t)\}_n$ сигналов (11). Ниже повторена часть этих результатов согласно соответствующим представлениям в декартовой системе координат. Дело в том, что дискретизация задач (1), (18) на сетке полярной системы координат приводит к далеко не оптимальным вычислительным схемам [3, 7, 29], а точное поглощающее условие (18), содержащее производные по нормали к виртуальной границе $\rho = M$, практически невозможно без значительных вычислительных ошибок реализовать на сетке декартовых координат y, z .

3. Точные поглощающие условия для виртуальных границ в декартовой системе координат.

В декартовой системе координат виртуальная граница L , для которой строятся точные поглощающие условия, сокращающие пространство счета открытых задач (1) до прямоугольника $Q_L = \{g \in Q: A_4 < y < A_3; A_2 < z < A_1\}$, – составная (см. рисунок). Такая граница порождает проблему угловых точек – точек пересечения координатных границ $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$. Решение этой непростой и важной проблемы вычислительной электродинамики [7] приведено ниже.

В области ${}_L Q = Q \setminus (Q_L \cup L)$ функция $U(g, t)$ отвечает уходящей волне, пересекающей границу L только в одном направлении, и удовлетворяет однородным задачам (1) с $\varepsilon(g) - 1 = \sigma(g) \equiv 0$. Используя в этих задачах преобразования Фурье

$$u_y(\lambda, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(y, z, t) e^{i\lambda y} dy \leftrightarrow U(y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_y(\lambda, z, t) e^{-i\lambda y} d\lambda,$$

$$u_z(y, \mu, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(y, z, t) e^{i\mu z} dz \leftrightarrow U(y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_z(y, \mu, t) e^{-i\mu z} d\mu$$

и применяя затем стандартную технику работы с возникающими однородными задачами для одномерных уравнений Клейна–Гордона (см., работы [1 – 5, 10]), получаем выражения

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] u_y(\lambda, z, t) = \pm \lambda \int_0^t J_1(\lambda(t-\tau)) \frac{\partial u_y(\lambda, z, \tau)}{\partial z} d\tau, \quad \begin{cases} z \geq A_1, \\ z \leq A_2, \end{cases} \quad (19)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] u_z(y, \mu, t) = \pm \mu \int_0^t J_1(\mu(t-\tau)) \frac{\partial u_z(y, \mu, \tau)}{\partial y} d\tau, \quad \begin{cases} y \geq A_3, \\ y \leq A_4. \end{cases} \quad (20)$$

Последовательность простых операций (см. [3,4]: преобразование Лапласа по t ; решение операционных уравнений относительно производных изображений функций u_y и u_z по пространственным переменным; обратное преобразование Лапласа) позволяет представить уравнения (19), (20) в такой эквивалентной форме:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] u_y(\lambda, z, t) = -\lambda \int_0^t \frac{J_1(\lambda(t-\tau))}{t-\tau} u_y(\lambda, z, \tau) d\tau, \quad \begin{cases} z \geq A_1, \\ z \leq A_2, \end{cases} \quad (21)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] u_z(y, \mu, t) = -\mu \int_0^t \frac{J_1(\mu(t-\tau))}{t-\tau} u_z(y, \mu, \tau) d\tau, \quad \begin{cases} y \geq A_3, \\ y \leq A_4. \end{cases} \quad (22)$$

Перейдем теперь от нелокальных условий (19) – (22), которые выписаны в терминах амплитуд Фурье поля $U(g, t)$ и сокращают область анализа в задачах (1) до полосы $A_2 < z < A_1$ или $A_4 < y < A_3$, к локальным во времени и в пространстве соотношениям. Продолжая работу с представлениями (21), (22) и действуя по схеме, впервые апробированной в [3], используем сначала интегральную формулу Пуассона [30]:

$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi,$$

а затем подстановки типа

$$v_y = -\lambda \int_0^t \frac{\sin(\lambda(t-\tau) \cos \varphi)}{\cos \varphi} u_y d\tau, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\lambda^2 \int_0^t \cos(\lambda(t-\tau) \cos \varphi) u_y d\tau \quad (23)$$

и фундаментальное решение [31] $G(a, t) = \chi(t) \sin(at) a^{-1}$ оператора $D(a) \equiv [d^2/dt^2 + a^2]$ для перехода от интегральных форм (23) к эквивалентным дифференциальным формам:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2 \cos^2 \varphi \right] v_y = -\lambda^2 u_y, \quad t > 0, \\ \left. \frac{\partial v_y}{\partial t} \right|_{t=0} = v_y|_{t=0} = 0.$$

В результате получаем

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] u_y(\lambda, z, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial v_y(\lambda, z, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi d\varphi, \quad t \geq 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2 \cos^2 \varphi \right] v_y(\lambda, z, t, \varphi) = -\lambda^2 u_y(\lambda, z, t), \quad t > 0, \\ \left. \frac{\partial v_y(\lambda, z, t, \varphi)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_y(\lambda, z, t, \varphi)|_{t=0} = 0, \quad \begin{cases} z \geq A_1, \\ z \leq A_2, \end{cases} \quad (24) \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] u_z(y, \mu, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial v_z(y, \mu, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi d\varphi, \quad t \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mu^2 \cos^2 \varphi \right] v_z(y, \mu, t, \varphi) = -\mu^2 u_z(y, \mu, t), \quad t > 0, \\ \left. \frac{\partial v_z(y, \mu, t, \varphi)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_z(y, \mu, t, \varphi)|_{t=0} = 0, \end{array} \right. \begin{cases} y \geq A_3, \\ y \leq A_4. \end{cases} \quad (25)$$

Пусть

$$V_1(g, t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} v_y(\lambda, z, t, \varphi) e^{-i\lambda y} d\lambda, \quad V_2(g, t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} v_z(y, \mu, t, \varphi) e^{-i\mu z} d\mu.$$

Тогда, после возвращения в (24) и (25) к оригиналам (после применения обратных преобразований Фурье), локальные точные поглощающие условия, сокращающие область анализа в задачах (1) до полосы в \mathbf{R}^2 , запишутся следующим образом:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] U(g, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial V_1(g, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi d\varphi, \quad |y| \leq \infty, \quad t \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] V_1(g, t, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(g, t), \quad |y| < \infty, \quad t > 0, \\ \left. \frac{\partial V_1(g, t, \varphi)}{\partial t} \right|_{t=0} = V_1(g, t, \varphi)|_{t=0} = 0, \quad |y| \leq \infty, \end{array} \right. \begin{cases} z \geq A_1, \\ z \leq A_2, \end{cases} \quad (26)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] U(g, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial V_2(g, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi d\varphi, \quad |z| \leq \infty, \quad t \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V_2(g, t, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(g, t), \quad |z| < \infty, \quad t > 0, \\ \left. \frac{\partial V_2(g, t, \varphi)}{\partial t} \right|_{t=0} = V_2(g, t, \varphi)|_{t=0} = 0, \quad |z| \leq \infty, \end{array} \right. \begin{cases} y \geq A_3, \\ y \leq A_4. \end{cases} \quad (27)$$

Каждое из четырех уравнений (26), (27) порождает точное поглощающее условие, которое сужает область анализа до полуплоскости $z < A_1$, $z > A_2$, $y < A_3$ или $y > A_4$. Внутренние дифференциальные задачи (задачи Коши) в них относительно функций $V_1(g, t, \varphi)$ (координата z здесь играет роль числового параметра) и $V_2(g, t, \varphi)$ (y – числовой параметр) поставлены корректно.

При сужении области до прямоугольной необходимо принять во внимание все четыре уравнения (26), (27), а внутренние дифференциальные задачи дополнить условиями на концах интервалов: в точках пересечения границ $z = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Можно предложить несколько способов решения этой проблемы (проблемы угловых точек), отличающихся техникой аналитических преобразований. Остановимся на одном из них, по-видимому, наиболее прозрачном.

Поработаем сначала с первыми уравнениями (уравнениями со знаком «плюс») из условий (26) и (27). На рисунке квадрант плоскости \mathbf{R}^2 , где они одновременно справедливы, засеян точками. Выделим в этом квадранте область $\mathbf{G} = \{g = \{y, z\} : A_3 < y < A_3 + 2\pi; A_1 < z < A_1 + 2\pi\}$ и воспользуемся здесь следующим представлением для функций $f(g, t) \in \mathbf{W}_2^1(\mathbf{G}^\infty, \beta) = \{f(g, t) : f(g, t) \exp(-\beta t) \in \mathbf{W}_2^1(\mathbf{G}^\infty)\}$:

$$f(g, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(n, m, s) e^{i(ny+mz)+st} ds; \quad \text{Re } s \geq \beta \geq 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \tilde{f}(n, m, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{A_1}^{A_1+2\pi} \int_{A_3}^{A_3+2\pi} f(g, t) e^{-i(ny+mz)-st} dy dz dt. \quad (28)$$

Для амплитуд $\tilde{u} = \tilde{u}(n, m, s)$, $\tilde{v}_j(\varphi) = \tilde{v}_j(n, m, s, \varphi)$ и $\tilde{w}_j(\varphi) = \tilde{w}_j(n, m, s, \varphi)$, $j=1,2$ функций $U(g, t)$, $V_j(g, t, \varphi)$ и $W_j(g, t, \varphi) = V_j(g, t, \varphi)\cos^2 \varphi + U(g, t)$ получим:

$$(s + im)\tilde{u} = \frac{2s}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \tilde{v}_1 d\varphi, \quad (s + in)\tilde{u} = \frac{2s}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \tilde{v}_2 d\varphi, \quad (29)$$

$$\tilde{w}_1 = \frac{s^2}{s^2 + n^2 \cos^2 \varphi} \tilde{u}, \quad \tilde{w}_2 = \frac{s^2}{s^2 + m^2 \cos^2 \varphi} \tilde{u}, \quad (30)$$

$$\tilde{v}_1 = -\frac{n^2}{s^2 + n^2 \cos^2 \varphi} \tilde{u}, \quad \tilde{v}_2 = -\frac{m^2}{s^2 + m^2 \cos^2 \varphi} \tilde{u}, \quad (31)$$

$$s^2 + m^2 + n^2 = 0. \quad (32)$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} in\tilde{w}_1(\varphi) &= in\tilde{u} \frac{s^2}{s^2 + n^2 \cos^2 \varphi} = \frac{s^2}{s^2 + n^2 \cos^2 \varphi} \left[-s\tilde{u} + \frac{2s}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \gamma \tilde{v}_2(\gamma) d\gamma \right] = \\ &= -s\tilde{u} \frac{s^2}{s^2 + n^2 \cos^2 \varphi} \left[1 + \frac{2\sin^2 \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} d\gamma \right] + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} s\tilde{u} \frac{s^2}{s^2 + m^2 \cos^2 \gamma} \times \\ &\times \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} d\gamma = -\frac{s}{\cos \varphi} \tilde{w}_1(\varphi) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} s\tilde{w}_2(\gamma) \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (33)$$

При преобразованиях в (33) были последовательно использованы уравнения (30), (29), (31); равенство

$$\frac{s^2}{s^2 + an^2} \times \frac{s^2}{s^2 + bm^2} = \frac{a}{a + (1-a)b} \times \frac{s^2}{s^2 + an^2} + \frac{b}{a + (1-a)b} \times \frac{s^2}{s^2 + bm^2},$$

справедливое для значений s , m и n , удовлетворяющих (32); и снова уравнения (30).

Возвращаясь в (33) к оригиналам, получаем

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right] W_1(g, t, \varphi) = \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} \frac{\partial W_2(g, t, \gamma)}{\partial t} d\gamma, \quad z \geq A_1, \quad y \geq A_3.$$

Здесь не обозначены верхние границы $z = L_1 + 2\pi$ и $y = L_3 + 2\pi$ области \mathbf{G} , в которой это уравнение справедливо. Очевидно, что в этом нет необходимости, так как размер области \mathbf{G} может быть произвольным.

Повторение операций, проведенных выше, но уже с функцией $im\tilde{w}_2(\varphi)$ в качестве объекта анализа, приводит к уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right] W_2(g, t, \varphi) = \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} \frac{\partial W_1(g, t, \gamma)}{\partial t} d\gamma, \quad z \geq A_1, \quad y \geq A_3.$$

Соотношения, которые связывают значения вспомогательных функций $W_1(g, t, \varphi)$ и $W_2(g, t, \varphi)$ во всех четырех областях, подобных \mathbf{G} , решают проблему угловых точек. Они позволяют корректно ставить внутренние начально-краевые задачи в условиях (26), (27) на конечных отрезках внешней границы \mathbf{L} прямоугольной области \mathbf{Q}_L . Соответствующая полная система уравнений, сокращающая область анализа \mathbf{Q} открытых задач (1) до ограниченной области \mathbf{Q}_L , принимает вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right] U(g, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial V_1(g, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi d\varphi, \quad A_4 \leq y \leq A_3, \quad t \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 V_1(g, t, \varphi)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_1(g, t, \varphi)}{\partial y^2} \right] &= 0, & A_4 < y < A_3, & t > 0, \\ \left. \frac{\partial V_1(g, t, \varphi)}{\partial t} \right|_{t=0} &= V_1(g, t, \varphi)|_{t=0} = 0, & A_4 \leq y \leq A_3, & \end{aligned} \right. \begin{cases} z = A_1, \\ z = A_2, \end{cases} \quad (34)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right] U(g, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial V_2(g, t, \varphi)}{\partial t} \sin^2 \varphi d\varphi, \quad A_2 \leq z \leq A_1, \quad t \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 V_2(g, t, \varphi)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_2(g, t, \varphi)}{\partial z^2} \right] &= 0, & A_2 < z < A_1, & t > 0, \\ \left. \frac{\partial V_2(g, t, \varphi)}{\partial t} \right|_{t=0} &= V_2(g, t, \varphi)|_{t=0} = 0, & A_2 \leq z \leq A_1, & \end{aligned} \right. \begin{cases} y = A_3, \\ y = A_4, \end{cases} \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right] W_1(g, t, \varphi) &= \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} \frac{\partial W_2(g, t, \gamma)}{\partial t} d\gamma, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right] W_2(g, t, \varphi) &= \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma} \frac{\partial W_1(g, t, \gamma)}{\partial t} d\gamma, \end{aligned} \right. \quad t \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \right\} \rightarrow g = \{A_3, A_1\}, \quad \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \rightarrow \{A_3, A_2\}, \quad \left\{ \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right\} \rightarrow \{A_4, A_1\}, \quad \left\{ \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right\} \rightarrow \{A_4, A_2\}. \quad (36)$$

По существу, три формулы (34)–(36) необходимо объединить в одну – только вместе они определяют точное локальное поглощающее условие для всей виртуальной координатной границы \mathbf{L} . Уравнения (36) в этом условии играют роль краевых условий во внутренних начально-краевых задачах соотношений (34) и (35). Здесь символами типа $\left\{ \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \right\} \rightarrow g = \{A_3, A_1\}$ задано правило выбора знаков в верхнем и нижнем уравнениях для различных угловых точек $g = \{y, z\}$.

Утверждение 2. Задачи (1) с областью анализа \mathbf{Q} и задачи (1) с областью анализа $\mathbf{Q}_L = \{g \in \mathbf{Q} : A_4 < y < A_3; A_2 < z < A_1\}$ и условиями (34)–(36) на ее внешней прямоугольной границе \mathbf{L} – эквивалентны.

Внутренние начально-краевые задачи в (34)–(36) относительно функций $W_1(g, t, \varphi)$ и $W_2(g, t, \varphi)$ поставлены корректно. \triangleleft

4. Проблема больших и удаленных источников поля. Граница \mathbf{L} делит бесконечно протяженную область анализа \mathbf{Q} задач (1) на две: \mathbf{Q}_L и ${}_L\mathbf{Q}$; $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_L \cup {}_L\mathbf{Q} \cup \mathbf{L}$. В первой из них (ограниченной) при определении значений функции $U(g, t)$ (при решении задач, снабженных точными поглощающими условиями) реализуются стандартные вычислительные схемы метода конечных разностей. Во второй поле $U(g, t)$ определяется своими значениями на границе \mathbf{M} с помощью представлений (15), (17). Важно то, что с помощью соответствующих транспортных операторов можно продвинуться в области ${}_L\mathbf{Q}$ как угодно далеко – их использование эффективно решает так называемую проблему дальней зоны [7] без каких-либо дополнительных аналитических построений и без привлечения представлений частотной области.

Сняв ряд модельных ограничений, вводимых при постановке начально-краевых задач (1), можно заметно усилить результаты, перечисленные выше. Это касается, в частности, проблемы больших и удаленных источников поля. Суть проблемы состоит в следующем. При стандартном подходе (область \mathbf{Q}_L включает в себя носители функций $F(g, t)$, $\varphi(g)$ и $\psi(g)$) наличие больших и отдаленных источников по-

ля приводит к значительному нерациональному расширению пространства счета, а следовательно, и к значительному увеличению машинных ресурсов, требуемых для численного решения соответствующих задач.

Можно предложить схемы решения проблемы такие, что их реализация не приведет к расширению пространства счета, а предварительная подготовка задач потребует лишь незначительных дополнительных аналитических усилий. Общее содержание этих схем определяется следующим образом. При постановке начально-краевых задач (1) и определении областей \mathbf{Q} и \mathbf{Q}_L предполагалось, что функции источников, возбуждающих рассматриваемые узлы, финитны в замыканиях полных областей анализа \mathbf{Q} , а их носители во все рассматриваемые моменты времени $0 \leq t \leq T$ принадлежат области \mathbf{Q}_L . Это позволило формулировать условия на виртуальных границах \mathbf{L} в терминах полного поля $U(g, t)$. Связанные с указанными предположениями ограничения можно полностью или частично снять, допустив, что какая-то часть токовых и (или) мгновенных источников расположена в области ${}_L\mathbf{Q}$. Нужно только нейтрализовать вклад приходящей (первичной) волны $U^i(g, t)$, порожденной этими источниками, в поле $U(g, t)$ на \mathbf{L} , вводя в рассмотрение функцию $U^s(g, t) = U(g, t) - U^i(g, t)$, описывающую рассеянное (вторичное) поле, так, например, как это было сделано в работах [3,8,11] в случае скалярных начально-краевых задач для отражательных решеток и аксиально-симметричных неоднородностей свободного пространства. Окончательные представления для всех уравнений модифицированной задачи можно выписывать как в терминах полного поля $U(g, t)$, так и в терминах вторичного поля $U^s(g, t)$, но нужно отметить, что формально корректное разделение поля $U(g, t)$ на составляющие $U^s(g, t)$ и $U^i(g, t)$ может оказаться физически некорректным по отношению к некоторым частям области \mathbf{Q} .

Остановимся коротко на следующем варианте решения проблемы. Пусть некоторые источники в задаче (1) сосредоточены вне области \mathbf{Q}_L , охватывающей, как и раньше, все эффективные рассеиватели. Функции, отвечающие этим источникам, обозначим через $\tilde{F}(g, t)$, $\tilde{\varphi}(g)$ и $\tilde{\psi}(g)$, а функции, отвечающие источникам, расположенным в \mathbf{Q}_L , — $F(g, t)$, $\varphi(g)$ и $\psi(g)$. Пусть также источники $\tilde{F}(g, t)$, $\tilde{\varphi}(g)$ и $\tilde{\psi}(g)$ порождают в плоскости \mathbf{R}^2 переменных y и z поле $U^i(g, t)$. Другими словами, пусть функция $U^i(g, t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U^i(g, t) = \tilde{F}(g, t), \quad g = \{y, z\} \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0, \\ & U^i(g, t) \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(g), \quad \frac{\partial}{\partial t} U^i(g, t) \Big|_{t=0} = \tilde{\psi}(g), \quad g \in \mathbf{R}^2. \end{aligned} \right. \quad (37)$$

Для функций $U^s(g, t) = U(g, t) - U^i(g, t)$; $g \in \mathbf{Q}$ получаем из (1), (37) следующие начально-краевые задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U^s(g, t) = \\ & = F(g, t) + \left[(\varepsilon - 1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right] U^i(g, t) = \Phi(g, t), \quad g = \{y, z\} \in \mathbf{Q}, \quad t > 0, \\ & U^s(g, t) \Big|_{t=0} = \varphi(g), \quad \frac{\partial}{\partial t} U^s(g, t) \Big|_{t=0} = \psi(g), \quad g \in \overline{\mathbf{Q}}, \\ & \left[E_{tg}^s(p, t) + E_{tg}^i(p, t) \right] \Big|_{p=\{x, y, z\} \in \mathbf{S}} = 0, \quad t \geq 0, \\ & D \left[U^s(g, t) + U^i(g, t) - U^{i(1)}(g, t) \right] \Big|_{g \in \mathbf{L}_1} = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \right. \quad (38)$$

Здесь $E_{tg}^i(g, t) \Big|_{g \in \mathbf{S}}$ — тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля, отвечающего функции $U^i(g, t)$, и $E_{tg}^s(g, t) \Big|_{g \in \mathbf{S}} + E_{tg}^i(g, t) \Big|_{g \in \mathbf{S}} = E_{tg}(g, t) \Big|_{g \in \mathbf{S}}$.

Токовый источник $\Phi(g, t)$ в правой части телеграфного уравнения задач (38) включает в себя истинный источник $F(g, t)$ и так называемые эквивалентные токи, наведенные полем $U^i(g, t)$ в диэлектрических неоднородностях области \mathbf{Q}_L . Задачи (38) отличаются от задач (1), рассмотренных выше, только несущественными деталями. Естественно, что их численное решение можно получить в рамках одних и тех же алгоритмов метода конечных разностей, сокращая пространство счета с помощью точных поглощающих условий (34) – (36). Необходимые для этого значения функции $U^i(g, t)$; $g \in \mathbf{R}^2$, $t > 0$ получаем, решая задачу (37) с использованием известной формулы Пуассона [31].

5. Алгоритмизация задач и основные электродинамические характеристики объектов. Стандартная дискретизация двумерных начально-краевых задач (1), (34) – (36) методом конечных разностей [7, 29] на равномерной прямоугольной сетке декартовых координат $g = \{y, z\}$ приводит к явным вычислительным схемам, однозначно определяющим сеточные функции $U(j, k, m) \approx U(y_j, z_k, t_m)$. Обозначим $O(\bar{h}^2)$ – погрешность аппроксимации, \bar{h} – шаг сетки по пространственным координатам, $\bar{l} = \bar{h}/2$ для $\vartheta = \max_{g \in \mathbf{Q}_L} \varepsilon(g) < 2$ или $\bar{l} < \bar{h}/2$ для $\vartheta \geq 2$ – шаг сетки по переменной времени t ; $y_j = j\bar{h}$, $z_k = k\bar{h}$, $t_m = m\bar{l}$.

Пределы вариации целых j , k и m определяются размерами областей \mathbf{Q}_L и длиной интервала $[0; T]$ времени наблюдения t : $g_{jk} \in \overline{\mathbf{Q}_L}$ и $t_m \in [0; T]$; $g_{jk} = \{y_j, z_k\}$. Условие, которое обеспечивает равномерную ограниченность приближенных решений $U(j, k, m)$ при уменьшающихся значениях \bar{h} и \bar{l} , выполнено (см., например, формулу (1.50) из [4]). Следовательно, согласно [29], вычислительные схемы метода конечных разностей устойчивы, а сеточные функции $U(j, k, m)$ сходятся к решениям $U(g_{jk}, t_m)$ рассматриваемых задач. Этот вывод подтвержден решением тестовых задач и сравнением с независимо полученными результатами.

Тестирование показало также, что погрешность, обусловленная использованием оригинальных точных поглощающих условий (34) – (36) в явных конечно-разностных схемах 2-го порядка аппроксимации, не превышает собственно погрешности, связанной со стандартной дискретизацией задач. Эта погрешность существенно меньше погрешностей, обусловленных использованием классических приближенных поглощающих условий [36 – 38] 1-го, 2-го, 3-го порядков аппроксимации, и, в отличие от последних, практически не нарастает с ростом t , что особенно важно при изучении ситуаций, связанных с резонансным рассеянием волн.

Конечно-разностная схема решения задач (1), дополненных точными поглощающими условиями на внешних границах пространства счета \mathbf{Q}_L , реализована в пакете специализированных программ, позволяющих рассчитывать все основные пространственно-временные и пространственно-частотные характеристики рассматриваемых открытых электродинамических структур. Частично эти характеристики перечислены ниже:

нормированная диаграмма направленности $D(\phi, k, R) = \frac{|\tilde{U}(R, \phi, k)|^2}{\max_{\phi_1 < \phi < \phi_2} |\tilde{U}(M, \phi, k)|^2}$ на части

$0 \leq \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \leq 360^\circ$ дуги $\rho = R \geq M$; $K_1 \leq k \leq K_2$; главный лепесток диаграммы направленности $\bar{\phi}(k)$: $D(\bar{\phi}(k), k, R) = 1$; $\phi_{0,5}(k)$ – ширина лепестка по уровню $D(\phi, k, R) = 0,5$;

коэффициент полезного действия излучателя $\eta(k) = 1 - \sum_n W_{np}(k)$;

пространственно-временное распределение значений $U(g, t)$; $g \in \mathbf{Q}_L$, $t \in [0; T]$.

Параметры \bar{h} , \bar{l} (шаги сетки), R , N_{ABC} (число отсчетов по параметру ϕ при реализации условий (34) – (36)) и другие относятся к внутренним параметрам метода. Их значения определяются требуемой точностью вычислений и физическим смыслом решаемых задач. Так, например, величина R определяет зону (ближняя, промежуточная или дальняя), для которой рассчитывается диаграмма направленности $D(\phi, k, R)$. Считаем, что граница ближней зоны задается значением $R = M$, а граница дальней зоны таким

значением R , увеличение которого не приводит к заметному изменению функции $D(\phi, k, R)$ для всех рассматриваемых значений k .

Пространственно-частотные характеристики $\tilde{f}(k)$ ($k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, частотный параметр или просто частота, λ – длина волны в свободном пространстве) получаем из временных характеристик $f(t)$ с помощью интегрального преобразования Фурье

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T f(t) e^{ikt} dt \leftrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{-ikt} dk, \quad (39)$$

где – изображение \leftrightarrow оригинал; T – верхний предел в интервале времени наблюдения t : функция $f(t)$ продолжена нулем для всех $t > T$.

Если в задаче (1) $F(g, t) \equiv 0$, $\varphi(g) = \psi(g) \equiv 0$, $\sigma(g) \equiv 0$, $U^{i(1)}(g, t) = U_p^{i(1)}(g, t) = v_{p1}(y, t) \mu_{p1}(z)$ и $\text{Re } \gamma_p > 0$, то величина $\eta(k)$ определяется формулой $\eta(k) = 1 - \sum_n W_{np}(k)$, где $W_{np}(k) = |R_{np}(k)|^2 \text{Re } \gamma_n / \gamma_p$ – часть энергии, приходящаяся на n -ю отраженную в виртуальный волновод ${}_1\mathbf{Q}$ моду при возбуждении структуры через границу \mathbf{L}_1 p -й распространяющейся волной; $R_{np}(k) = \tilde{u}_{n1}(y, k) / \tilde{v}_{p1}(y, k) \Big|_{y=-L_1}$ – соответствующий коэффициент отражения; $\gamma_n = \left[k^2 - (n\pi/l_1)^2 \right]^{1/2}$ – постоянная распространения n -й волны, $\text{Re } \gamma_n \geq 0$ и $\text{Im } \gamma_n \geq 0$.

Ближнее импульсное поле $U(g, t)$ определяется непосредственно в пространстве счета \mathbf{Q}_L , а далее – путем пересчета поля $U(g, t)$ с дуги $\rho = M$ на дугу $\rho = R > M$, удаленную от виртуальных границ \mathbf{L} и \mathbf{M} на требуемое расстояние. По пространственно-временным амплитудам $u_n(\rho, t)$ поля $U(g, t)$ (см. формулу (11)), рассчитанным для окружности $\rho = M$, можно определить и дальнейшее монохроматическое поле $\tilde{U}(\rho, \phi, k) \leftrightarrow U(\rho, \phi, t)$; $\rho = R > M$. Для этого необходимо использовать спектральные представления

$$u_n(\rho, t) \leftrightarrow \tilde{u}_n(\rho, k) = a_n(k) H_n^{(1)}(k\rho); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (40)$$

($H_n^{(1)}(\dots)$ – функция Ханкеля), следующие из парциальных условий излучения для уходящих цилиндрических волн (см., например, формулу (1.37) в [4]). По пространственно-временным амплитудам $u_n(\rho, t)$ поля $U(g, t)$, рассчитанным для окружности $\rho = M$, определяются с помощью (40) наборы комплексных амплитуд $a_n(k)$, а затем (с помощью условий излучения) и величины $\tilde{U}(M, \phi, k)$.

Заключение. В работе строго решены модельные двухмерные задачи, позволяющие изучать пространственно-временные и пространственно-частотные трансформации электромагнитных волн, направляемых, излучаемых и рассеиваемых компактными открытыми резонаторами с волноводной питающей линией. Построены транспортные операторы и точные поглощающие условия, использование которых решает проблему дальней зоны (проблему определения импульсного поля в дальней зоне по полю в ближней зоне) и проблему корректного ограничения пространства счета оригинальных открытых начально-краевых задач. Рассмотрены и решены вопросы, возникающие в случае больших и отдаленных источников поля, а также в случае возбуждения моделируемых структур из волноводной питающей линии. Полученные результаты легко обобщаются на случай закрытых H -плоскостных волноводных трансформаторов и плоских компактных открытых резонаторов, нагруженных на любое конечное число плоскопараллельных волноводов.

Литература

1. Сиренко Ю. К., Шестопалов В. П., Яшина Н. П. Новые методы динамической линейной теории открытых волноводных резонаторов. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 1997, т. 37, № 7, с. 869 – 877.
2. Sirenko Y. K., Yashina N. P. Nonstationary model problems for waveguide open resonator theory. – Electromagnetics, 1999, vol. 19, no. 5, pp. 419 – 442.

3. *Сиренко Ю. К.* Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах. – Харьков: ЭДЭНА, 2003.
4. *Sirenko Y. K., Strom S., Yashina N. P.* Modeling and analysis of transient processes in open resonant structures. New methods and techniques. – New York: Springer, 2007.
5. *Sirenko Y. K., Yashina N. P.* Time domain theory of open waveguide resonators: canonical problems and a generalized matrix technique. – Radio Science, 2003, vol. 38, no. 2, p. VIC 26-1–VIC 26 – 12.
6. *Шестопалов В. П., Щербак В. В.* Матричные операторы в задачах дифракции. – Известия вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, № 2, с. 285 – 305.
7. *Taflove A.* Computational electrodynamics – the finite difference time domain method. – Massachusetts: Artech House, 1995.
8. *Perov A. O., Sirenko Yu. K., Yashina N. P.* Explicit conditions for virtual boundaries in initial boundary value problems in the theory of wave scattering. – J. of Electromag. Waves and Appl., 1999, vol. 13, no. 10, p. 1343 – 1371.
9. *Сиренко Ю. К., Пазынин В. Л., Вязьмитинова А. И., Сиренко К. Ю.* Компактные неоднородности свободного пространства: виртуальные границы в скалярных и векторных «открытых» начально-краевых задачах теории рассеяния несинусоидальных электромагнитных волн. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2003, т.8, № 11-12, с. 33 – 54.
10. *Сиренко К. Ю., Сиренко Ю. К.* Точные «поглощающие» условия в начально-краевых задачах теории открытых волноводных резонаторов. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 2005, т. 45, № 3, с. 509 – 525.
11. *Сиренко К. Ю.* Транспортные операторы в аксиально-симметричных задачах электродинамики несинусоидальных волн. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2006, т. 11, № 11, с. 15 – 26.
12. *Пазынин В. Л., Сиренко К. Ю.* Строгий подход к анализу переходных процессов в аксиально-симметричных волноводных узлах. – Радиофизика и электроника: Сб. научн. тр. / НАН Украины, Ин-т радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова. – Харьков, 2005, т. 10, № 2, с. 183–192.
13. *Пазынин В. Л., Сиренко К. Ю.* Преобразование импульсных TE_{0n} - и TM_{0n} -волн аксиально-симметричными волноводными узлами. Простые неоднородности. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2005, т. 10, № 8, с. 29 – 39.
14. *Пазынин В. Л., Сиренко К. Ю.* Преобразование импульсных TE_{0n} - и TM_{0n} -волн аксиально-симметричными волноводными узлами. Щелевые резонансы. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2005, т. 10, № 10, с. 21 – 26.
15. *Мележик П. Н., Пазынин В. Л., Сиренко К. Ю.* Преобразование импульсных TE_{0n} - и TM_{0n} -волн аксиально-симметричными волноводными узлами. Специальные задачи. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2006, т. 11, №2-3, с. 22 – 29.
16. *Сиренко К. Ю., Пазынин В. Л.* Аксиально-симметричные излучатели импульсных и монохроматических TE_{0n} - и TM_{0n} -волн. – Успехи современной радиоэлектроники, 2006, № 4, с. 52 – 69.
17. *Сиренко Ю. К., Вязьмитинова А. И., Пазынин В. Л., Сиренко К. Ю.* Численное моделирование электродинамических характеристик. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2007, т.12, № 1, с. 24 – 34.
18. *Kuzmitchev I. K., Melezhyk P. M., Pazynin V. L., Sirenko K. Yu., Sirenko Yu. K., Shafalyuk O. S., Velychko L. G.* Model synthesis of energy compressors. – Радиофизика и электроника: Сб. научн. тр. / НАН Украины, Ин-т радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова. – Харьков, 2008, т. 13, № 2, с. 166 – 172.
19. *Sirenko Y. K., Velychko L. G., Erden F.* Time-domain and frequency-domain methods combined in the study of open resonance structures of complex geometry. – Progress in Electromagnetics Research, 2004, vol. 44, pp. 57 – 79.
20. *Sirenko Y. K., Velychko L. G., Shafalyuk O. S.* Time-domain analysis of open resonators. Analytical grounds. – Progress in Electromagnetics Research, 2006, vol. 61, pp. 1 – 26.
21. *Sirenko K. Y.* Slot resonances in axially symmetric radiators of pulse-modulated and monochromatic TM_{0n} -modes. – Telecommunication and Radio Engineering, 2007, vol. 66, no. 1, pp. 9 – 21.
22. *Борисов В. В.* Электромагнитные поля неустановившихся токов. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996.
23. *Борисов В. В.* Установившиеся поля в волноводах. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1991.
24. *Maloney J. G., Smith G. S.* Optimization of a conical antenna for pulse radiation: an efficient design using resistive loading. – IEEE Trans. on AP, 1993, vol. 41, no. 7, pp. 940 – 947.
25. *Montoya T. P., Smith G. S.* A study of pulse radiation from several broad-band monopoles. – IEEE Trans. on AP, 1996, vol. 44, no. 8, pp. 1172 – 1182.
26. *Sauleau R., Coquet Ph., Matsui T., Daniel J.-P.* A new concept of focusing antennas using plane-parallel Fabry-Perot cavities with nonuniform mirrors. – IEEE Trans. on AP, 2003, vol. 51, no. 11, pp. 3171–3175.
27. *Guerin N., Enoch S., Tayeb G., Sabouroux P., Vincent P., Legay H.* A metallic Fabry-Perot directive antenna. – IEEE Trans. on AP, 2006, vol. 54, no. 1, pp. 220–224.
28. *Месяц Г. А., Яландин М. И.* Пикосекундная электроника больших мощностей. – Успехи физических наук, 2005, т. 175, № 3, с. 225 – 245.
29. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.
30. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968.
31. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988.
32. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т.1 и 2. – М.: Наука, 1981.
33. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматлит, 1963.
34. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976.
35. *Майков А. Р., Свешников А. Г., Якунин С. А.* Разностная схема для нестационарных уравнений Максвелла в волноводных системах. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 1986, т. 26, № 6, с. 851 – 863.
36. *Engquist B. V., Majda A.* Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. – Mathematics of Computation, 1977, vol. 31, no. 139, pp. 629 – 651.
37. *Mur G.* Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. – IEEE Tr. on EMC, 1981, vol. 23, no. 4, pp. 377 – 382.
38. *Tirkas P. A., Balanis C. A., Renaut R. A.* Higher order absorbing boundary conditions for FDTD-method. – IEEE Tr. on AP, 1992, vol. 40, no. 10, pp. 1215 – 1222.

Поступила 4 декабря 2008 г.

Transport Operators and Exact Absorbing Conditions in the Plane Problems of the Electrodynamics of Pulsed Waves for Compact Open Resonators with the Waveguide Feeder Line

© V.F. Kravchenko, Y.K. Sirenko, K.Y. Sirenko

The paper is devoted to construction of transport operators and exact absorbing conditions for the 2-D scalar problems describing transient states of an electromagnetic field formed by compact open electrodynamic systems with the waveguide feeder line. The main purpose is to create reliable and effective models and algorithms allowing one to solve numerically actual theoretical and applied problems of the antenna theory and technique, high-power electronics, and resonant quasi-optics.

Key words: *Operators method, pulsed waves, open resonator, waveguide feeder line.*

Кравченко Виктор Филиппович (1939 г.р.) – докт. физ.-мат. наук, проф., главный научн. сотр. ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, заслуж. деятель науки РФ.

Область научных интересов: R-функции, атомарные функции, вейвлеты, электродинамика сверхпроводящих структур, анализ и синтез антенн, прикладные математика и физика, дистанционное зондирование неоднородных сред.

E-mail: kvf@pochta.ru

Сиренко Юрий Константинович (1949 г.р.) – докт. физ.-мат. наук, проф., зав. отделом математической физики Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова Национальной академии наук Украины (г. Харьков).

Область научных интересов: теория резонансного рассеяния волн.

Сиренко Константин Юрьевич (1982 г.р.) – канд. физ.-мат. наук, научн. сотр. Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова Национальной академии наук Украины (г. Харьков).

Область научных интересов: математическое моделирование и вычислительная электродинамика.

E-mail: yks@ire.kharkov.ua

В н и м а н и е !

В Издательстве «Радиотехника» вышла в свет книга

Излучение и рассеяние электромагнитных волн

Под редакцией В.А. *Обуховца*

Рассмотрены особенности вычисления электромагнитных полей источников в присутствии многослойных тел вращения, а также принципы построения многочастотных частотно-избирательных поверхностей и многослойных ЧИП с требуемыми характеристиками рассеяния; исследованы характеристики излучения и рассеяния конечных и бесконечных решеток излучателей в виде плоскопараллельных полубесконечных волноводов с проводящим и импедансным фланцем и вопросы нелинейного рассеяния ЭМВ; показаны возможности расширения полосы частот антенной решетки из печатных излучателей Вивальди.

Для инженеров и научных работников, преподавателей и студентов радиотехнических специальностей вузов.

По вопросам заказа и приобретения книги
обращаться в Издательство «Радиотехника» по адресу:

107031, г.Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 20/6,
тел./факс: (495) 625-78-72, 621-48-37, 625-92-41
<http://www.radiotec.ru>, e-mail: info@radiotec.ru